EULERS VENNER

Foreningen af Matematikere

Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet, 8000 Århus C

euler@imf.au.dk, http://home.imf.au.dk/euler/

BACHELOR-FOREDRAG OM SERRES SPEKTRALFØLGE

TIRSDAG DEN 9. NOVEMBER KLOKKEN 16 I AUD. D1

VED EMIL HEDEVANG LOHSE

Vær venlig at tage plads på briksen.

Det er jo ikke min skyld! Jeg kunne da ikke vide, at det ville tage sådan overhånd!

Rolig nu, begynd ved begyndelsen, og fortæl mig, hvordan det hele startede.

Vi ville bare beregne fundamentalgruppen for cirklen, altså $\pi_1(S^1)$. Den første homotopigruppe var gratis, sagde de! Men så tog den ene eksakte følge den anden, og pludselig stod vi i homologi til knæene!

Jeg forstår ikke helt. Hvordan beregnede I fundamentalgruppen for cirklen?

Først fandt vi ud af, at vi kunne lave en overlejring af cirklen, $\mathbf{Z} \to \mathbf{R} \to S^1$, med de hele tal som fiber og de reelle tal som totalrum. Herfra kunne vi udlede, at $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$. Men så kom vi til at generalisere fundamentalgruppen til begrebet homotopigrupper i almindelighed, og vi fandt ud af, at overlejringen blot var et særtilfælde af en fibrering $F \to X \to B$, og til den kunne vi pludselig knytte en lang eksakt følge i homotopi:

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(B) \to \cdots.$$

Og den er jo utrolig smart til at beregne homotopigrupper.

Det lyder da ikke så slemt, gør det?

Nej, men nu var vi i gang, og der var ingen af os, der turde stoppe. Vi tænkte, at går den for homotopigrupper, så går den sgu nok også for homologigrupper.

Vi lavede en homologi ved at se på et kædekompleks K bestående af kæder af visse æsker i X. Da nogle af æskerne var opblæste, kunne vi lave en filtrering FK af K. Ud fra filtreringen kunne vi lave endnu et kædekompleks GFK, og dette passede ind i en kort eksakt følge af kædekomplekser,

$$0 \to FK \to FK \to GFK \to 0.$$

Til denne følge kunne vi knytte en eksakt trekant af homologierne af kædekomplekserne.

$$\begin{tikzcd} HFK \arrow[rr, "i"] & & HFK \arrow[dl, "j"] \\ & HGFK \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

Men da $(jk)(jk) = 0$, viste det sig, at $E = HGFK$ selv blev til et kædekompleks, og at dets homologi E' passede ind i endnu en eksakt trekant. Nu var løbet kørt, for på denne måde skabte vi en hel følge af eksakte trekanter:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "i'"] & & D' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} D'' \arrow[rr, "i''"] & & D'' \arrow[dl, "j''"] \\ & E'' \arrow[ul, "k''"] & \end{tikzcd} \quad \cdots$$

Ser man det. Fortsæt endelig.

Det viste sig så, at denne følge konvergerede mod en eksakt trekant, og at E-leddet i denne egentlig bare var $GFHK$, som er en gruppe hørende til en filtrering af homologien HK af K.

Men det stoppede ikke her! Vi fandt nemlig også ud af, at E' var homologien af B med koefficienter i homologien af F.

Det lyder som om I fik skabt et kraftfuldt værktøj til at knytte sammenhænge mellem homologierne af de tre rum i fibreringen.

Ja, det havde vi sandelig også.

Men hvad kan det så bruges til?

Aaaarrrrghhhh!