Wigner's semi-cirkel lov

12. december 2009

Eulers Venner

Steen Thorbjørnsen
Institut for Matematiske Fag
Århus Universitet

Diagonalisering af selvadjungeret matrix

Lad H være en $n \times n$ matrix med komplekse indgange, og antag, at H er selvadjungeret: $H^* = H$.

Husk, at H har n reelle egenværdier: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

Endvidere findes en unitær $n \times n$ matrix U, således at

$$UHU^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Spektralafbildning

Lad I være et interval, således at $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in I$, og betragt en funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$.

Vi definerer da

$$f(H) := U^* \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & 0 \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} U.$$

Den empiriske egenværdi-fordeling

Den empiriske egenværdi-fordeling for H er sandsynlighedsmålet μ_H på $\mathbb{R}$ givet ved:

$$\mu_H = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j}.$$

For en delmængde B af $\mathbb{R}$ har vi, at

$$\begin{aligned}
\mu_H(B) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j}(B) \\
&= \frac{1}{n}\#\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \lambda_j \in B\} \\
&= \text{andelen af } H\text{'s egenværdier der ligger i } B.
\end{aligned}$$

Hvordan integrerer man med hensyn til egenværdifordelingen?

For en funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har vi, at

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mu_H(\mathrm{d}t) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\big(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{j=1}^n \delta_{\lambda_j}\big)(\mathrm{d}t) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\delta_{\lambda_j}(\mathrm{d}t) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(\lambda_j) \\
&= \mathrm{tr}_n\left[U^* \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} U\right] \\
&= \mathrm{tr}_n\big[f(H)\big].
\end{aligned}
$$

Stokastiske matricer og deres egenværdier

Betragt et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

En stokastisk $n \times n$ matrix er en $n \times n$ matrix $T = (T_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, hvor $T_{ij} : \Omega \to \mathbb{C}$ er en stokastisk variabel.

T er en selvadjungeret stokastisk matrix, hvis $T(\omega) = T^*(\omega)$ for alle ω i Ω.

Hvis T er en selvadjungeret stokastisk matrix kan vi for hvert ω betragte egenværdierne for $T(\omega)$:

$$\lambda_1(\omega) \leq \lambda_2(\omega) \leq \cdots \leq \lambda_n(\omega).$$

For hvert j bliver $\lambda_j : \Omega \to \mathbb{R}$ en reel stokastisk variabel.

Spektralfordelingen af en s.a. stokastisk matrix

Lad T være en selvadjungeret stokastisk $n \times n$ matrix.

For hvert ω kan vi betragte egenværdifordelingen:

$$\mu_{T(\omega)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j(\omega)}.$$

Spektralfordelingen for L_T for T defineres for B i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ved:

$$\begin{aligned} L_T(B) &= \int_\Omega \mu_{T(\omega)}(B)\, P(\mathrm{d}\omega) \\ &= \frac{1}{n} \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j(\omega)}(B) \Big) P(\mathrm{d}\omega) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega 1_B(\lambda_j(\omega))\, P(\mathrm{d}\omega). \end{aligned}$$

Hvordan integrerer man mht. spektralfordelingen?

Lad T være en selvadjungeret stokastisk $n \times n$ matrix.

For enhver Borel-mængde B i $\mathbb{R}$ har vi, at

$$\int_{\mathbb{R}} 1_B(t)\, L_T(\mathrm{d}t) = L_T(B) = \int_\Omega \mu_{T(\omega)}(B)\, P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{R}} 1_B(t)\, \mu_{T(\omega)}(\mathrm{d}t) \Big)\, P(\mathrm{d}\omega).$$

Ved anvendelse af standard-beviset følger det så, at

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, L_T(\mathrm{d}t) = \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mu_{T(\omega)}(\mathrm{d}t) \Big)\, P(\mathrm{d}\omega)$$

for enhver begænset Borel-funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hvordan integrerer man mht. spektralfordelingen?

Vi finder videre, at

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)\, L_T(\mathrm{d}t) &= \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mu_{T(\omega)}(\mathrm{d}t) \Big)\, P(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_\Omega \mathrm{tr}_n(f(T(\omega))\, P(\mathrm{d}\omega) \\ &= \mathbb{E}\big[\mathrm{tr}_n(f(T))\big].\end{aligned}$$

The Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

Definition. Med $\mathrm{GUE}(n,\sigma^2)$ betegner vi klassen af stokastiske matricer $W = (w_{ij})_{1\le i,j\le n}$, defineret på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og således at

- $\forall i \geq j$: $w_{ij} = \overline{w_{ji}}$.
- de stokastiske variable w_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$ er uafhængige.
- $\forall i < j$: $\mathrm{Re}(w_{ij}), \mathrm{Im}(w_{ij}) \sim \text{i.i.d. } N(0, \frac{1}{2}\sigma^2)$.
- $\forall i$: $w_{ii} \sim N(0, \sigma^2)$.

Hvis $W \in \mathrm{GUE}(n,\sigma^2)$, da gælder der, at

$$\mathbb{E}\{w_{i,j}w_{k,l}\} = \sigma^2\delta(i,l)\delta(j,k).$$

Spektralfordelingen af $\mathrm{GUE}(n, \frac{1}{n})$

Lad W_n være en stokastisk matrix i $\mathrm{GUE}(n, \frac{1}{n})$.

Da gælder for enhver Borel-mængde B i $\mathbb{R}$, at

$$L_{W_n}(B) = \int_B h_n(x)\,\lambda(\mathrm{d}x),$$

hvor

- $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j\big(\sqrt{\tfrac{n}{2}}x\big)^2.$

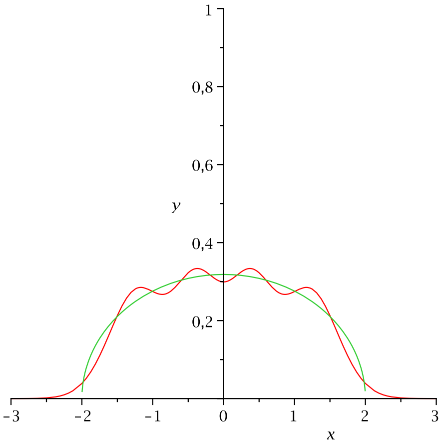
- $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ er følgen af Hermite funktioner:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(2^k k! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_k(x) \exp(-\tfrac{x^2}{2}), \qquad (k \in \mathbb{N}_0),$$

- $H_0, H_1, H_2, \ldots,$ er Hermite polynomierne:

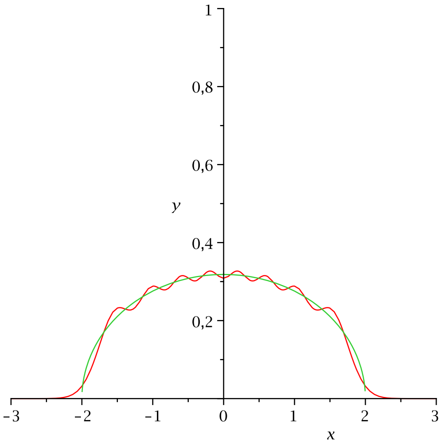
$$H_k(x) = (-1)^k \exp(x^2) \cdot \Big(\frac{d^k}{dx^k} \exp(-x^2)\Big).$$

Den asymptotiske opførsel af L_{W_n} for $n \longrightarrow \infty$



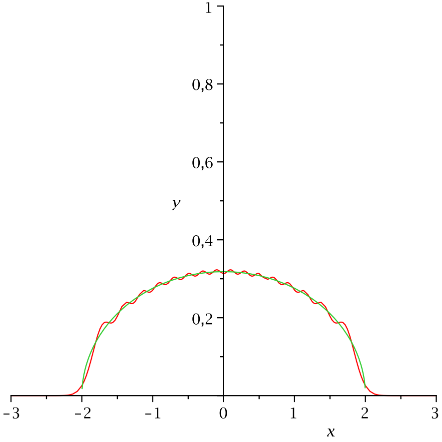
Graferne for $h_4(x)$ og $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}1_{[-2,2]}(x)$.

Den asymptotiske opførsel af L_{W_n} for $n \longrightarrow \infty$



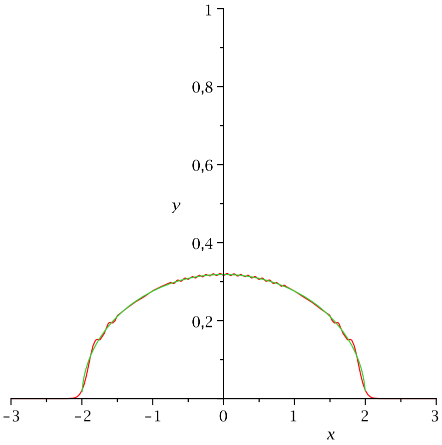
Graferne for $h_8(x)$ og $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}1_{[-2,2]}(x)$.

Den asymptotiske opførsel af L_{W_n} for $n \longrightarrow \infty$



Graferne for $h_{16}(x)$ og $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}1_{[-2,2]}(x)$.

Den asymptotiske opførsel af L_{W_n} for $n \longrightarrow \infty$



Graferne for $h_{32}(x)$ og $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}1_{[-2,2]}(x)$.

Wigner's semi-cirkel lov.

Betragt for ethvert n i $\mathbb{N}$ en stokastisk matrix W_n fra $\mathrm{GUE}(n, \frac{1}{n})$.

Da gælder der, at

$$L_{W_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \gamma, \quad \text{for } n \to \infty.$$

Her er γ målet med tæthed

$$h_\infty(x) := \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\,1_{[-2,2]}(x), \qquad (x \in \mathbb{R})$$

med hensyn til Lebesgue-målet λ.

Svag konvergens af sandsynlighedsmål

Konvergensen $L_{W_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \gamma$ betyder at følgende ækvivalente betingelser er opfyldte:

(i) $L_{W_n}(I) \longrightarrow \gamma(I)$ for ethvert interval I i $\mathbb{R}$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, L_{W_n}(\mathrm{d}x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \gamma(\mathrm{d}x)$ for enhver kontinuert begrænset funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(iii) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\, L_{W_n}(\mathrm{d}x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta x}\, \gamma(\mathrm{d}x)$ for ethvert θ i $\mathbb{R}$.

(iv) $\int_{\mathbb{R}} x^p\, L_{W_n}(\mathrm{d}x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} x^p\, \gamma(\mathrm{d}x)$ for alle p i $\mathbb{N}_0$.

Momenterne for semi-cirkel fordelingen

Benyttes substitutionen $x = 2\sin\theta$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, finder man

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2p}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4^p \sin^{2p}\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}\;2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4^{p+1}}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2p}\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4^{p+1}}{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2p}\,\mathrm{d}\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2p+2}\theta\,\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{4^{p+1}}{2\pi}\left[\frac{\pi}{4^p}\binom{2p}{p} - \frac{\pi}{4^{p+1}}\binom{2p+2}{p+1}\right] \\
&= \frac{1}{p+1}\binom{2p}{p} \\
&= p\text{'te Catalan tal.}
\end{aligned}
$$

$n \times n$ matrix enhederne

For i, j fra $\{1, 2, \ldots, n\}$ lader vi $e(i, j)$ betegne $n \times n$ matricen med indgange $e(i, j)_{rs}$ givet ved:

$$e(i, j)_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } (i, j) = (r, s) \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Der gælder regnereglen:

$$e(i, j)e(k, l) = \delta(j, k)e(i, l) \quad \text{for alle } i, j, k, l \text{ fra } \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Wick's formel

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_d$ være stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at

- $\mathbb{E}[X_i] = 0$ for alle i.
- $(X_1, \ldots, X_d) \sim$ normalfordeling på $\mathbb{R}^d$.

For vilkårlige p i $\mathbb{N}$ og $i_1, i_2, \ldots, i_p$ fra $\{1, 2, \ldots, r\}$ gælder da, at

$$\mathbb{E}\big[X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_p}\big] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(p)} \prod_{(r,s) \in \pi} \mathbb{E}\big[X_{i_r} X_{i_s}\big].$$

Her er

$$\mathcal{P}_2(p) = \big\{\text{par-dannelser af } \{1, 2, \ldots, p\}\big\}.$$

Pardannelse $\leftrightarrow$ permutation

En pardannelse π af $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ kan vi naturligt opfatte som en permutation $\tilde{\pi}$ af $\{1, 2, \ldots, 2p\}$:

$$(r, s) \in \pi \iff \tilde{\pi}(r) = s \quad \text{og} \quad \tilde{\pi}(s) = r.$$

Det følger da, at

$$\prod_{(r,s)\in\pi} \delta(i_r, i_{s+1})\delta(i_s, i_{r+1}) = \prod_{r=1}^{2p} \delta(i_r, i_{\tilde{\pi}(r)+1}) = \prod_{r=1}^{2p} \delta(i_r, i_{\tau\circ\tilde{\pi}(r)}).$$

Her er $\tau = (1, 2, 3, \ldots, 2p)$.

Biane's geodesic condition

For enhver par-dannelse π af $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ gælder der, at

$$c(\tau \circ \tilde{\pi}) \leq p + 1$$

og

$$c(\tau \circ \tilde{\pi}) = p + 1 \iff \pi \text{ har ingen krydsninger.}$$

Antallet af ikke-krydsende par-dannelser

For hvert p i $\mathbb{N}$ sætter vi

$$C_p := \#\{\pi \in \mathcal{P}_2(2p) \mid \pi \text{ har ingen krydsninger}\}.$$

Der gælder da, at

$$C_p = \frac{1}{p+1}\binom{2p}{p}.$$

Dette kan f.eks. indses ved at bevise, at tallene $(C_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ opfylder rekusionsformlerne:

$$\begin{cases} C_0 = C_1 = 1, \\ C_p = \sum_{j=1}^{p} C_{j-1} C_{p-j}, \quad p \geq 2. \end{cases}$$

Det er ikke svært at checke, at løsningerne til disse rekusionsformler netop er Catalan-tallene!

Stærk version af Wigner's semi-cirkel lov

Ved nøjere analyse af de foregående overvejelser, kan man indse, at

$$\mathbb{E}\{\mathrm{tr}_n[W_n^{2p}]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2p}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x + O(n^{-2})$$

$$\mathrm{Var}\{\mathrm{tr}_n[W_n^{2p}]\} = O(n^{-2}).$$

For hvert n i $\mathbb{N}$ sættes nu:

$$Y_n = \mathrm{tr}_n[W_n^{2p}] - \mathbb{E}\{\mathrm{tr}_n[W_n^{2p}]\}.$$

Ved anvendelse af Chebychev's Ulighed følger det for ethvert $\epsilon > 0$, at

$$P(Y_n > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}\{\mathrm{tr}_n[W_n^{2p}]\} = O(n^{-2}).$$

Specielt fremgår det, at $\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n > \epsilon) < \infty$.

Stærk version af Wigner's semi-cirkel lov

Det følger da fra Borel-Cantelli lemmaet, at

$$P(Y_n > \epsilon, \text{ for uendeligt mange } n) = 0.$$

Dermed har vi også, at

$$P(N) = 0, \quad \text{hvor} \quad N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{Y_n > k^{-1}, \text{ for uendeligt mange } n\}.$$

Hvis $\omega \in N^c$, har vi, at $Y_n(\omega) \to 0$ for $n \to \infty$, og dermed at

$$\mathrm{tr}_n[W_n(\omega)^{2p}] \to \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^{2p} \sqrt{4 - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Det fremgår således, at

$$\mu_{W_n(\omega)} \xrightarrow{\mathrm{w}} \gamma \quad \text{for } P\text{-n.a. } \omega.$$

Største og mindste egenværdi

Ved analoge argumenter, kan man vise, at

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{\max}(W_n(\omega)) = 2, \text{ for } P\text{-n.a. } \omega,$$

og

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{\min}(W_n(\omega)) = -2, \text{ for } P\text{-n.a. } \omega.$$