Gult Foredrag Om Net

Jacob Schach Møller

Department of Mathematical Sciences
University of Aarhus

Århus 8th March, 2010

Introduktion I: Fra Metriske til Topologiske Rum

Et metrisk rum er en mængde udstyret med en afstandsfunktion.

Afstandsfunktionen bruges så, med $\mathbb{R}^n$ og euklidisk afstand som inspirationskilde, til at formulere begreber som åbne og lukkede mængder, konvergens og kontinuitet.

Har man først defineret de åbne mængder så viser det sig at de andre egenskaber kan gives ækvivalente beskrivelser udelukkende i termer af åbne mængder.

Denne observation leder op til introduktionen af topologiske rum i geometri kurset, hvor metrikken bliver fjernet og man tager udgangspunkt i en på forhånd givet familie af åbne mængder.

Man kan så også her snakke om lukkede mængder, konvergens og kontinuitet ved simpelthen at bruge de tilsvarende karakteriseringer fra metriske rum som en definition.

Introduktion II: Fra Følger til Net

Følger spiller som bekendt en central rolle i matematisk analyse. I metriske rum kan begreberne fra før, samt kompakthed, også gives ækvivalente formuleringer i termer af følger.

Det vil sige at lukkethed, kontinuitet og kompakthed, kan beskrives ved hjælp af følger.

Vi vil se nogle eksempler hvor følgekarakterisationen af disse begreber i topologiske rum ikke gælder.

Det ledte Moore og Smith i 1922 til at udvide begrebet følge til noget som kaldes for net.

Ved at erstatte følger med net kan man genfinde de tabte ækvivalente formuleringer.

Et andet ækvivalent begreb, kaldet filtre, blev indført af Cartan i 1937.

Metriske Rum

Lad X være en mængde og $d : X \times X \to [0, \infty)$.

Definition

Vi siger at (X, d) udgør et metrisk rum hvis

1. $d(x, y) = 0$ hvis og kun hvis $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ for alle $x, y \in X$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ for alle $x, y, z \in X$.

Euklidisk metrik: $X \subset \mathbb{R}$ med metrikken $d(x, y) = |x - y|$

Diskret metrik: X en vilkårlig mængde og

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}.$$

Følger og Konvergens

Lad (X, d) være et metrisk rum. En følge i X er en delmængde indekseret ved de naturlige tal $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$.

En følge kaldes konvergent hvis der eksisterer et $x \in X$ så $d(x, x_k) \to 0$ som en reel talfølge. Punktet x kaldes et grænsepunkt for følgen. En følge kan højst havde ét grænsepunkt.

Euklidisk metrik: Følgen $\{1/k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er konvergent i $X = [0, 1]$ men ikke i $X = (0, 1]$.

Diskret metrik: En følge er konvergent hvis og kun hvis den fra et hvist trin er konstant og lig med sit grænsepunkt.

Åbne og Lukkede Mængder

Lad os indføre notationen
$$B_r^X(x) = \{y \in X | d(x,y) < r\},$$
for den åbne 'kugle' omkring $x \in X$ med radius $r > 0$. Vi kalder en

delmænge U af et metrisk rum for åben hvis der til ethvert $x \in U$ findes $r > 0$ således at $B_r(x) \subset U$.

En delmænge U kaldes lukket hvis dens komplement $U^c = X \backslash U$ er åben.

Euklidisk metrik: En mængde $U \subset X \subset \mathbb{R}$ er åben (lukket) hvis og kun hvis der findes en mængde $U' \subset \mathbb{R}$ der er åben (lukket) i $\mathbb{R}$ så $U = U' \cap X$.

Diskret metrik: Et punkts mængder $\{x\} = B_{1/2}(x)$ er åbne og dermed er alle mængder både åbne og lukkede.

Følgelukkede Mængder

Sætning

En følge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er konvergent, med grænse x, hvis og kun hvis: For enhver åben omegn U af x findes et $N \in \mathbb{N}$ således at $x_k \in U$ for alle $k \geq N$.

En delmængde L af et metrisk rum X kaldes følgelukket hvis en enhver konvergent følge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L$ har sit (entydige) grænsepunkt i L. Fra ovenstående sætning får vi:

Sætning

I et metrisk rum er en delmængde lukket hvis og kun hvis den er følgelukket.

Kompakte Rum

Lad (X, d) være et metrisk rum. En familie af åbne mængder $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ kaldes en overdækning af X hvis $X = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Hvis $J \subset I$ og $X = \cup_{\alpha \in J} U_\alpha$ så kaldes $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ en deloverdækning.

Hvis *enhver* åben overdækning af X har en *endelig* deloverdækning, i.e. J er en endelig mængde, så kaldes X et kompakt metrisk rum.

Euklidisk metrik: $X \subset \mathbb{R}$ er kompakt metrisk rum hvis og kun hvis X set som delmængde af $\mathbb{R}$ er lukket og begrænset.

Diskret metrik: X er kompakt hvis og kun hvis den består af endeligt mange punkter.

Delfølger og Følgekompakte Mængder

En delmængde $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ af en følge, kaldes en delfølge hvis $k_{j+1} > k_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$.

Lad (X, d) være et metrisk rum. Vi kalder X følgekompakt hvis enhver følge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i X har en konvergent delfølge.

Sætning

Et metrisk rum er kompakt hvis og kun hvis det er følgekompakt.

Kontinuerte og Følgekontinuerte Funktioner

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være to metriske rum. En funktion $f : X \to Y$ kaldes kontinuert i $x \in X$ hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ så } \forall y \in B_\delta^X(x) : \quad d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

$f : X \to Y$ kaldes kontinuert hvis f er kontinuert i alle $x \in X$.

Hvis X har diskret metrik er *alle* funktioner $f : X \to Y$ kontinuerte (vælg $\delta = 1/2$).

Hvis $X \subset \mathbb{R}$ har euklidisk metrik og Y har diskret metrik er de kontinuerte funktioner lokalt konstante (sæt $\epsilon = 1/2$).

En funktion $f : X \to Y$ kaldes følgekontinuert hvis f afbilder *alle* konvergente følger $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ i konvergente følger $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset Y$.

Topologisk Kontinuerte Funktioner

Lad igen (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum og $f : X \to Y$. Vi minder om at urbilledet for f af en delmængde $V \subset Y$ er givet ved

$$f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}.$$

En funktion $f : X \to Y$ kaldes topologisk kontinuert hvis urbilledet $f^{-1}(V)$ af enhver åben delmængde $V \subset Y$ er åben i X.

Sætning

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum og $f : X \to Y$ en funktion. Da er følgende ækvivalent.

1. f er kontinuert.
2. f er følgekontinuert.
3. f er topologisk kontinuert.

Topologiske Rum

Mange af de begreber vi indførte i metriske rum var formuleret eller kan formuleres i termer af åbne mængder.

Det er i den sammenhæng naturligt at identificerer præcist de egenskaber ved de åbne mængder som det hele hænger på.

Det leder os til at indføre ...

... Topologiske Rum

Lad X være en mængde og τ en familie af delmængder af X. Vi kalder (X, τ) et topologisk rum hvis

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ medfører at $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.
3. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau$ medfører at $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

De Samme Egenskaber i Topologiske Rum

Lad (X, τ_X) være et topologisk rum. Mængerne i τ_X vil vi opfatte som de åbne mængder. Vi kan nu genindføre egenskaberne fra metriske rum ved reference til de åbne mængder direkte istedet for til en metrik.

En følge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ kaldes konvergent hvis der eksisterer $x \in X$, et grænsepunkt, således at for enhver $U \ni x$ åben eksisterer $N \in \mathbb{N}$ så $x_k \in U$ for all $k \geq N$.

En mængde U kaldes lukket hvis den er komplementet af en åben mængde, i.e. $U^c \in \tau_X$.

Et topologisk rum X kaldes kompakt hvis enhver overdækning af X, med mængder fra τ_X, har en endelig deloverdækning.

Lad (Y, τ_Y) være et andet topologisk rum. En funktion $f : X \to Y$ siges at være kontinuert hvis $f^{-1}(V) \in \tau_X$ for alle $V \in \tau_Y$.

Metrisk Topologi

Lad (X, d) være et metrisk rum. Lad τ_X bestå af de $U \subset X$ hvorom det gælder at U er åben med hensyn til metrikken. Da er (X, τ_X) et topologisk rum og τ_X kaldes en metrisk topologi.

Lukkethed, konvergens, kontinuitet og kompakthed i X er uafhængigt af om man vælger at opfatte X som et metrisk rum, eller et topologisk rum.

Topologien på $X \subset \mathbb{R}$, kommende fra euklidisk metrik, kaldes (relativ) euklidisk topologi

Omvendt kaldes et topologisk rum (X, τ_x) metriserbart, hvis der findes en metrik d på X som præcist har mængderne fra τ_X som de åbne mængder.

Mængden τ_X af alle delmængder af en mængde X kaldes den diskrete topologi på X. Den diskrete topologi er metriserbar, med den diskrete metrik.

Triviel Topologi

Lad X være en mængde med mindst 2 elementer. Den trivielle topologi på X er givet ved $\tau = \{\emptyset, X\}$.

Da $\emptyset$ og X er hinandens komplementærmængder er $\emptyset$ og X de eneste lukkede mængder i topologien.

Da et givet x kun har X som åben omegn så ser vi et alle følger $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ er konvergente med alle $x \in X$ som grænsepunkter! Dermed er $\emptyset$ og X de eneste følgelukkede mængder.

Da τ er en endelig familie er enhver overdækning af X endelig, så X er et kompakt rum. Ved ovenstående er X også følgekompakt.

Tællelig Komplement Topologi I

Lad X være en overtællelig mængde. En mængde $U \subset X$ har tælleligt komplement hvis $U^c = X \backslash U$ er en (højst) tællelig mængde.

Lad nu τ_X bestå af $\emptyset$ og alle delmængder $U \subset X$ med tælleligt komplement. Da er (X, τ_X) et topologisk rum og τ_X kaldes tællelig komplement topologien.

De lukkede mængder er X selv og de (højst) tællelige delmængder af X.

En følge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ er konvergent hvis og kun hvis den er konstant fra et trin af. I så fald er punktet i den konstante hale det eneste grænsepunkt. Specielt er *alle* delmængder følgelukkede!

X er dog hverken kompakt eller følgekompakt.

Tællelig Komplement Topologi II

Lad (Y, τ_Y) være et andet topologisk rum. Da de eneste konvergente følger i X er de der er konstante fra et trin af, må *alle* funktioner $f : X \to Y$ være følgekontinuerte!

Tag nu $X = Y = \mathbb{R}$, og udstyr Y med euklidisk topologi. Vælg for $f : X \to Y$ identitets afbildningen $f(t) = t$.

Lad $U = (0, 1) \subset Y = \mathbb{R}$, som er euklidisk åben. Da er $f^{-1}(U) = U$ som ikke har tælleligt komplement, og dermed ikke er åben i X.

Vi har således produceret en funktion der er følgekontinuert men ikke kontinuert!!

Produkt Topologi I: En Basis for Topologien

Lad nu X bestå af *alle* funktioner $f : [0,1] \to [0,1]$. For $t \in [0,1]$, lad $p_t : X \to [0,1]$ betegne afbildningen der evaluerer $f \in X$ i punktet t. I.e. $p_t(f) = f(t)$.

Vi vil gerne udstyre X med en topologi hvori afbildningerne $p_t : X \to [0,1]$ er kontinuerte, når $[0,1]$ gives den euklidiske topologi $\tau_{[0,1]}$.

Det vil sige at topologien skal indeholde mængderne

$$\mathcal{S} = \left\{ \left\{ f \in X \middle| f(t) \in U \right\} \middle| t \in [0,1] \text{ og } U \in \tau_{[0,1]} \right\}.$$

Ved endeligt snit egenskaben for en topologi skal vi også inkludere

$$\mathcal{B} = \left\{ \left\{ f \in X \middle| f(t_j) \in U_j, 1 \le j \le n \right\} \middle| n \in \mathbb{N}, t_j \in [0,1] \text{ og } U_j \in \tau_{[0,1]} \right\}.$$

Produkt Topologi II: Åbne og Lukkede Mængder

For at lave en topologi kan vi nu tage vilkårlige foreninger af elementer fra $\mathcal{B}$. Det giver os en topologi τ_X, som kaldes for produkt topologien på X (som har $\mathcal{B}$ som basis).

Produkt topologien kan udtrykkes ved

$$\tau_X = \left\{ W \subset X \middle| \forall x \in W \exists U \in \mathcal{B} \text{ så } x \in U \subset W \right\}.$$

τ_X er den mindste topologi på X med $p_t(f) = f(t)$ kontinuerte.

Vi får eksempler på lukkede mængder ved at udregne komplementet af mængder $U \in \mathcal{B}$. De er på formen

$$\left\{ f \in X \middle| f(t_j) \in L_j, 1 \leq j \leq n \right\},$$

hvor $n \in \mathbb{N}$, $t_j \in [0,1]$ og $L_j \subset [0,1]$ er lukkede. De resterende lukkede mængder får man ved at forme vilkårlige snit af ovenstående mængder.

Produkt Topologi III: Følgelukkede Delmængder

Sætning

Følgende er ævivalent.

1. $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er konvergent, med $f \in X$ som grænse.
2. $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er punktvist konvergent, med f som grænse.

Eksempler på følgelukkede mængder (ud over U^c, $U \in \mathcal{B}$,) er:

$$A_1 = \Big\{ f \in X \Big| \{ t \in [0,1] | f(t) \neq 0 \} \text{ er tællelig} \Big\}$$
$$A_2 = \Big\{ f \in X \Big| f \text{ Borel målelig} \Big\}.$$

Nu bliver det mystisk da både A_1^c og A_2^c er ikke tomme og alle mængder $U \in \mathcal{B}$ opfylder at $U \cap A_j \neq \emptyset$ så A_1 og A_2 kan ikke være lukkede! (Faktisk er A_1 og A_2 tætte i X.)

Produkt Topologi IV: X Er Ikke Følgekompakt.

For et givet $t \in [0,1]$, lad $\mathrm{bin}_k(t) \in \{0,1\}$ betegne det k'te ciffer i den binære ekspansion af t. Her vælger vi den ekspansion af t der har nuller vilkårligt langt ude. For eksempel 1's ekspansion er 1.0000... og ikke 0.1111....

Vi betragter nu funktionsfølgen $\{\mathrm{bin}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$.

Lad $\{\mathrm{bin}_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ være en delfølge. Vælg t_0 til at være et tal i $[0,1]$ hvis binære ekspansion opfylder at $\mathrm{bin}_{k_j}(t_0) = 1$ når j er lige, og $\mathrm{bin}_{k_j}(t_0) = 0$ når j er ulige.

Da er $\{\mathrm{bin}_{k_j}(t_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ikke konvergent da den alternerer mellem 0 og 1. Derfor kan $\{\mathrm{bin}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ikke have en konvergent delfølge, og X er ikke følgekompakt.

Det er et ikke-trivielt faktum, Tychonoff's Sætning, at X faktisk er et kompakt topologisk rum!

Opad Filtrerede Mængder

Definition

En mængde I med ordning $\leq$ kaldes opad filtreret hvis følgende gælder

1. For alle $\alpha \in I$ er $\alpha \leq \alpha$.
2. For alle $\alpha, \beta, \gamma \in I$, med $\alpha \leq \beta$ og $\beta \leq \gamma$, gælder at $\alpha \leq \gamma$.
3. For alle $\alpha, \beta \in I$ eksisterer der $\gamma \in I$ så $\alpha \leq \gamma$ og $\beta \leq \gamma$.

Det mest basale eksempel er $I = \mathbb{N}$ med sædvanlig ordning.

Som et overtælligt eksempel kan vi tage $I = (a, b)$ med sædvanlig ordning.

Som et sidste eksempel lad I bestå af alle endelige delmængder af $[0, 1]$, med mængdeinklusion som ordning. For $A, B \in I$ vil $A \cup B \in I$ være størrere end både A og B.

Net

Definition

Et par (I, i) kaldes et net i X hvis

1. I er en opad filtrereret mængde.
2. $i : I \to X$ en funktion.

Vi skriver også nettet som $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, hvor $x_\alpha = i(\alpha)$.

Følger $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ er naturligvis eksempler på net. Her er $I = \mathbb{N}$ med sædvanlig orden, og $i(k) = x_k$.

Lad $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ være en funktion. Da er $\{g(t)\}_{t \in (a,b)}$ et net i $\mathbb{R}$, hvor $I = (a, b)$ udstyres med sædvanlig ordning, og $i(t) = g(t)$.

Lad I være de endelige delmængder af $[0, 1]$ med mængde inklusion som ordning. Som et net af funktioner tager vi $\{\mathbb{1}_A\}_{A \in I}$, hvor $\mathbb{1}_A$ er den karakteristiske funktion på mængden A.

Konvergens af Net

Lad nu X være et topologisk rum. Vi generaliserer konvergens begrebet fra følger til net og siger at et net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ er konvergent hvis og kun hvis der eksisterer et $x \in X$, et grænsepunkt, så:

$$\forall U \ni x \text{ åben } \exists \beta \in I : \quad \forall \alpha \geq \beta \text{ er } x_\alpha \in U.$$

I.e. nettet ligger fra et hvist trin af i enhver åben omegn af x.

En følge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er konvergent som net hvis og kun hvis den er konvergent som følge.

Nettet $\{g(t)\}_{t\in(a,b)}$ er konvergent hvis og kun hvis $\lim_{t\to b-} g(t)$ eksisterer.

Produkt Topologi V: Et Konvergent Net

Sætning

Lad $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ være et net i rummet X af funktioner fra $[0,1]$ til $[0,1]$. Da er følgende ækvivalent.

1. Nettet $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ er konvergent i X.
2. Nettene $\{f_\alpha(t)\}_{\alpha\in I}$ er konvergente i $[0,1]$ for all $t\in[0,1]$.

Nettet $\{\mathbb{1}_A\}_{A\subset[0,1]}$, med A endelig, er konvergent i X med den konstante funktion 1 som grænse, da nettene $\{\mathbb{1}_A(t)\}_{A\subset[0,1]}$ er konvergent i $[0,1]$ med 1 som grænse, for alle $t\in[0,1]$.

Bemærk at nettet ovenfor forløber i den følgelukkede mængde A_1 og grænsepunktet 1 ligger udenfor den følgelukkede, men ikke lukkede, mængde A_1.

Delnet

For at behandle kompakthed får vi brug for begrebet *delnet*, der overtager delfølgernes rolle. Bemærk at vi kan *ikke* definere delnet som net på formen (J, i) med $J \subset I$ en opad filtreret delmængde. Da ville delnet af følger svare til delfølger og det er ikke godt nok.

Definition

Lad (I, i) være et net i X. Vi kalder (J, j), hvor J er opad filtreret, for et delnet af (I, i) hvis der eksisterer $h : J \to I$ så $j = i \circ h$ og

$$\forall \alpha \in I \; \exists \mu \in J : \quad \forall \lambda \geq \mu \text{ er } h(\lambda) \geq \alpha.$$

Delfølger af følger er naturligvist delnet. Her er $J = \mathbb{N}$ og $h(j) = k_j$.

Net Karakterisation

Sætning

Lad (X, τ) være et topologisk rum. Da gælder følgende

1. En delmængde $A \subset X$ er A lukket hvis og kun hvis: Ingen konvergente net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset A$, har grænsepunkt uden for A.
2. X er kompakt hvis og kun hvis: Ethvert net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ har et konvergent delnet.
3. Lad Y være et andet topologisk rum. En funktion $f : X \to Y$ er kontinuert hvis og kun hvis: Funktionen f sender alle konvergente net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ i konvergente net $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in I} \subset Y$.

Produkt Topologi VI: Kandidat til Grænsepunkt

Vi vender nu tilbage til eksemplet på en følge i X uden konvergent delfølge. Vi ønsker istedet at finde et konvergent delnet. Det er rimeligt at lede efter en indikator funktion som grænsefunktion, da bin_k kun tager værdierne 0 og 1.

Konstruktionen hænger på eksistensen af en maximal mængde $B \subset [0,1]$ med følgende egenskab

$$\forall F \subset B, N \in \mathbb{N}, \ F \text{ endelig } \ \exists k \geq N : \quad \mathrm{bin}_k(t) = 1, \ t \in F.$$

Med maximal menes at B ikke er ægte indeholdt i en større delmængde af $[0,1]$ med samme egenskab. Eksistensen af B hænger på Hausdorff's Maximalitets Princip.

Man kan nu vise at følgende udsagn holder vand: For alle $F \subset [0,1]$ endelig og $N \in \mathbb{N}$ eksisterer $k \geq N$ så

$$\mathrm{bin}_k(t) = 1, t \in F \cap B, \quad \text{og} \quad \mathrm{bin}_k(t) = 0, t \in F \cap B^c.$$

Produkt Topolgi VI: Et Konvergent Delnet

Vi er nu parat til at konstruere et delnet af $\{\mathrm{bin}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ der konvergerer mod $\mathbb{1}_B$. Som opad filtrereret mængde tager vi

$$J = \{(F,N)\}_{F\subset[0,1],N\in\mathbb{N}},$$

med F endelige delmængder. Vi får en ordning på J ved at sætte $(F,N) \leq (\tilde{F},\tilde{N})$ hvis $F \subset \tilde{F}$ og $N \leq \tilde{N}$. J er opad filtreret da $(F\cup\tilde{F}, \max\{N,\tilde{N}\})$ dominerer både (F,N) og $(\tilde{F},\tilde{N})$.

Vi kan nu vælge $h : J \to \mathbb{N}$ ved at sætte $h((F,N)) = k \geq N$, hvor k opfylder egenskaberne fra sidste side med det givne F og N. Det giver et delnet af $\{\mathrm{bin}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Med det valg er det klart at nettet $\{\mathrm{bin}_{h(F,N)}\}_{(F,N)\in J}$ konvergerer mod $\mathbb{1}_B$ da $\mathrm{bin}_{h(F,N)}(t) = \mathbb{1}_B(t)$ for alle $(F,N) \geq (\{t\},1))$.

Og Til Sidst....

.... Et **stort** hurra for uniformt konvergente funktionsfølger, som kan beskrives ved en metrisk topologi.