Igennem kaninhullet

Hvordan matematikken blev moderne

Henrik Kragh Sørensen

Center for Videnskabsstudier
Institut for Fysik og Astronomi
Aarhus Universitet

Eulers Venner
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
4. oktober 2011

Dagens program

Del 1: Hvad kan være moderne ved matematik?

Del 2: Fra kurver til funktioner

Del 3: Weierstrass' Monster

Del 4: Matematiske monstre og tabet af intuition

Del 5: Opsummering og perspektiver

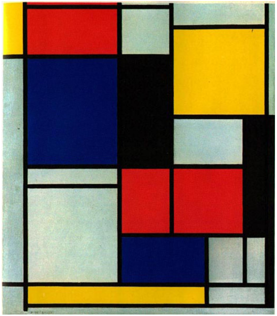
Del I

Hvad kan være moderne ved matematik?

Matematikken og det moderne

Fire aspekter af „det moderne“ (modernisme, modernitet):

1. Menneskets relationer til naturen.
2. Menneskets relationer til hinanden.
3. Menneskets relationer til sig selv.
4. Menneskets relationer til Gud.



Piet Mondrian (1872–1944)

H.-J. Schanz (2009). “Hvad er modernitet?” I: *Modernitetens Verden: Tiden, videnskab, historien og kunst*. Udg. af O. Høiris og T. Ledet. Århus: Aarhus Universitetsforlag, s. 33–40.

Et kronologisk overblik

ca. 300 f.v.t. 1637 ca. 1690 ca. 1825 1870'erne

Klassisk græsk matematik; geometri, aksiomer, beviser; Euklid

Analytisk geometri; Descartes

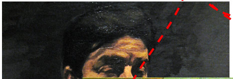
Differentialregning; Newton, Leibniz

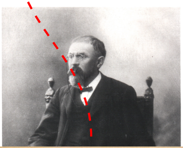
Stringens, nybrud, romantik; Cauchy, Abel, Bolzano, Bolyai

Moderne gennembrud, mængdelære, reelle tal, monstre; Cantor, Weierstrass, Dedekind

1872–74: Tre år hvor matematikken blev moderne?

1871 1872 1873 1874





I 1872 udgav Dedekind (og Cantor, Heine og Weierstrass) konstruktioner af de reelle tal

alede „E
" i 187
n blev

I 1872 forelagde Weierstrass et Monster for Berlinerakademiet

I
Poly
opgi
de dansk m
sskifte og
stiftet

g
vde
men

Cantor påbegyndte sin mængdelære i 1874

Del II

Fra kurver til funktioner

Forholdet mellem kurver og ligninger

- Den antikke græske matematik hos Euklid (ca. 295 f.v.t.) handlede om geometri: studiet af kurver og figurer.
- Blandt disse kurver var cirklen og den rette linje de mest elementære, men senere kom også keglesnit og andre kurver (loci) til.
- René du Perron Descartes (1596–1650) opfandt analytisk geometri i et 3-skridts-program, som oversatte geometriske problemer til algebraiske ligninger, løste disse ligninger, og udførte den geometriske konstruktion af løsningen.

Kontinuitet af kurver og funktioner

- Isaac Newton (1642–1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) opfandt uafhængigt differential- og integralregningen i slutningen af 1600-tallet til „analytisk“ behandling af kurver.
- I 1700-tallet udviklede Leonhard Euler (1707–1783) analysen til en omfattende og kraftfuld disciplin.
- Euler studerede *funktioner* som kunne skrives op og arbejdede *formelt* med dem, fx

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{1}$$

- I sine berømte forelæsninger ved *Ecole Polytechnique* erstattede Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) den formelle omgang med funktioner med en numerisk behandling, således at (1) *kun* har mening for $|x| < 1$.
- Cauchy baserede derfor begreber som „kontinuitet“ og „konvergens“ på et numerisk grundlag.

Uendelige rækker og kontinuitet

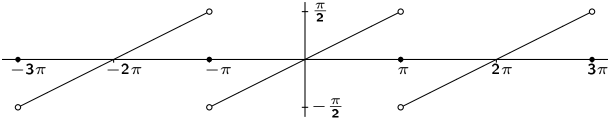
Cauchys Sætning (1821)

Enhver konvergent række af kontinuerte funktioner er kontinuert.

Abels undtagelse (1826)

"Det synes mig, at denne sætning tillader undtagelser", fx funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}. \tag{2}$$



H. K. Sørensen (2005). "Exceptions and counterexamples. Understanding Abel's comment on *Cauchy's Theorem*". *Historia Mathematica*, bd. 32, nr. 4, s. 453–480.

En besynderlig verden skabt ud af intet

Bolyai og opdagelse af ikke-euklidisk geometri

Da Johann Bolyai (1802–1860) i 1823 beskrev sin opdagelse af hyperbolsk (ikke-euklidisk) geometri til sin far hævdede han „at have skabt en helt ny verden ud af intet“.

Cantor og dimensionsbegrebet

Da Georg Cantor (1845–1918) opdagede at enhedsintervallet og enhedskvadratet er „ækvipotente“ (har samme kardinalitet) skrev han til sin ven og kollega Richard Dedekind (1831–1916): „Jeg ser det, men jeg tror det ikke“.

Selv det oplagte må bevises

Mellemværdisætningen

Mellemværdisætningen: Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion, og der findes x_1, x_2 så $f(x_1) < 0$ og $f(x_2) > 0$, så findes der x_0 mellem x_1 og x_2 så $f(x_0) = 0$.

- Cauchy havde anset den for oplagt, men alligevel givet to argumenter for den (et geometrisk og et baseret på approksimationer).
- I 1872 fandt flere matematikere, bl.a. Richard Dedekind (1831–1916) ud af, at sætningen ikke kunne bevises uden at konstruere de reelle tal.
- Konstruktionerne af de reelle tal er præcis sådan at mellemværdisætningen kan bevises.

Del III

Weierstrass' Monster

Weierstrass opdager et monster

Weierstrass' Monster

I 1872 præsenterede Weierstrass en opdagelse af en ny og meget aparte funktion:

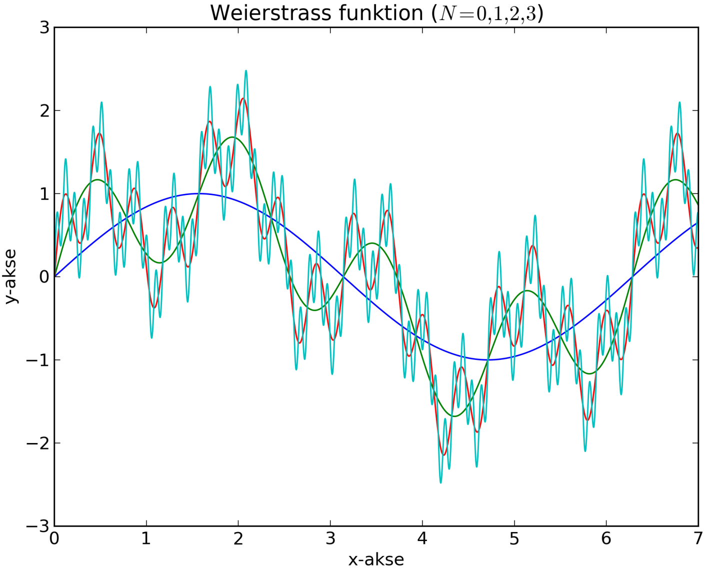
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi). \qquad \text{(WM)}$$

Hvis a er et lige tal, $0 < b < 1$ og $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, så er funktionen $f(x)$ overalt kontinuert, men intetsteds differentiabel.

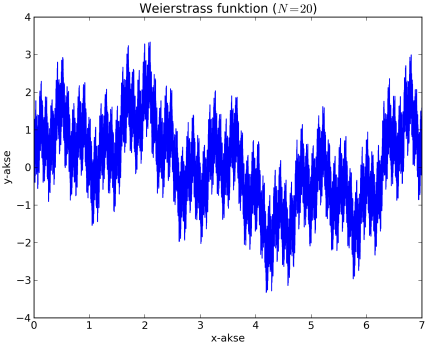
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
(1815–1897)

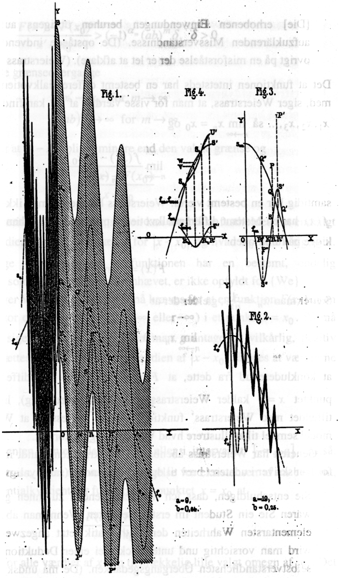
K. Weierstrass (1872). "Über continuerliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotient besitzen". I: *Mathematische Werke von Karl Weierstrass*. Bd. 2. 7 bd. Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli 1872. Berlin: Mayer und Müller, s. 71–74.

Weierstrass' Monster viser sig



Weierstrass' Monster kan ikke tegnes





C. Wiener (1881). "Geometrische und analytische Untersuchung der *Weierstrass*schen Function". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, bd. 90, s. 221–252.

Weierstrass' Monster er virkelig monstrøst I: Kontinuitet

- Man indser forholdsvis let at (WM) er en kontinuert funktion:

$$|b^n \cos(a^n x\pi)| \leq b^n$$

- Rækken er derfor majoriseret af en konvergent kvotientrække og derfor er konvergensen uniform.
- Og vi (og Weierstrass) ved (fra Calculus), at enhvert uniformt konvergent sum af kontinuerte funktioner er en kontinuert funktion.

Weierstrass' Monster er virkelig monstrøst II: Definitioner

- Betragt et fast x_0 og lad m være et heltal. Så findes et entydigt heltal α_m så

$$x_m \underset{\text{def.}}{=} a^m x_0 - \alpha_m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

- Med definitionerne

$$x' \underset{\text{def.}}{=} \frac{\alpha_m - 1}{a^m} \quad \text{og} \quad x'' \underset{\text{def.}}{=} \frac{\alpha_m + 1}{a^m}$$

  har man

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m} \quad \text{og} \quad x'' - x_0 = \frac{1 + x_{m+1}}{a^m}.$$

Weierstrass' Monster er virkelig monstrøst II: Opsplitning

- Man om-organiserer nu

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(b^n\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{x'-x_0}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'-x_0)}\right)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\left(b^{m+n}\frac{\cos(a^{m+n} x'\pi)-\cos(a^{m+n} x_0\pi)}{x'-x_0}\right)$$

Weierstrass' Monster er virkelig monstrøst II: Vurderinger

- Additionsformler og vurderinger giver

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'-x_0)}\right)\right| < \frac{\pi}{ab-1}(ab)^m.$$

- Additionsformler for cosinus-funktionen giver

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(b^{m+n}\frac{\cos(a^{m+n}x'\pi)-\cos(a^{m+n}x_0\pi)}{x'-x_0}\right)$$
$$=(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n.$$

og denne vurderes $\geq \frac{2}{3}$.

Weierstrass' Monster er virkelig monstrøst II: Resultat

- Altså kan man skrive

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta \left(\frac{2}{3} + \epsilon \frac{\pi}{ab-1}\right),$$

  hvor $\eta > 1$ og $\epsilon \in [-1, 1]$.

- Tilsvarende argumenter viser at

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \epsilon_1 \frac{\pi}{ab-1}\right),$$

  hvor $\eta_1 > 1$ og $\epsilon_1 \in [-1, 1]$.

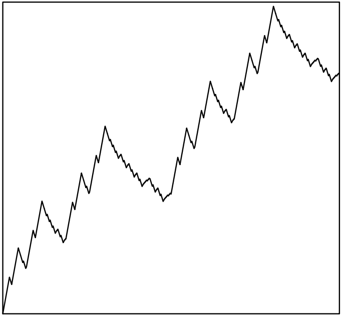
- Hvis man så vælger a, b således at $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, så har de to differenskvotienter

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \quad \text{og} \quad \frac{f(x') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

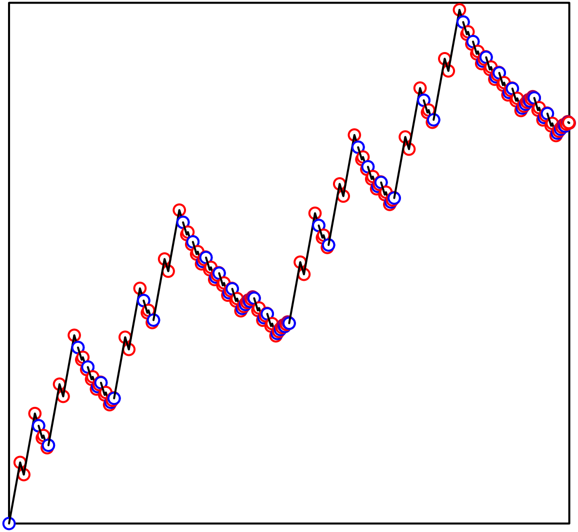
  modsat fortegn og de bliver *begge uendeligt store*, når m „vokser uden grænser". Altså har „$f(x)$ i punktet $x = x_0$ hverken en bestemt endelig eller en bestemt uendeligt stor differentialkvotient."

Bolzano og Monsterets forgængere

- Faktisk var Weierstrass ikke den første til at konstruere en kontinuert, ikke-differentiabel funktion.
- Den tjekkiske munk, matematiker og filosof Bernard Bolzano (1781–1848) havde i 1830'erne beskrevet en konstruktion, som giver ikke-differentiabilitet på en *tæt mængde*.
- Bolzanos kurve er *faktisk* også intetsteds differentiabel.



Iterativ konstruktion af Bolzanos kurve



Del IV

Matematiske monstre og tabet af intuition

Gyselige, menneskeskabte monstre

Gyselige, menneskeskabte monstre

Jules Henri Poincaré (1854–1912) i 1899

"Logikken skaber sommetider monstre. Det sidste halve århundrede har vi set en strøm af bizare funktioner, som synes tvunget til at ligne så lidt som muligt ærlige funktioner, der tjener et formål. Mere kontinuitet, eller mindre kontinuitet, flere afledte osv. Faktisk, fra et logisk synspunkt, er disse mærkelige funktioner de mest generelle; men på den anden side udgør alle de, som man møder uden at lede efter dem og som følger simple love et bemærkelsesværdigt særtilfælde, som ikke fylder mere end et lille hjørne. Når man tidligere opfandt en ny funktion var det med et praktisk formål i sigte; i dag opfinder man dem bevidst for at vise defekter i vore fædres argumenter og man udleder fra dem kun det.
Hvis logik var den eneste guide for læreren ville det være nødvendigt at starte med de mest generelle funktioner, dvs. med de mest bizare. Det er så begynderen, der ville blive kastet ud i dette teratologiske museum [teratologi: studiet af abnormaliteter]."

Gyselige, menneskeskabte monstre

Charles Hermite (1822–1901) omtrent samtidig

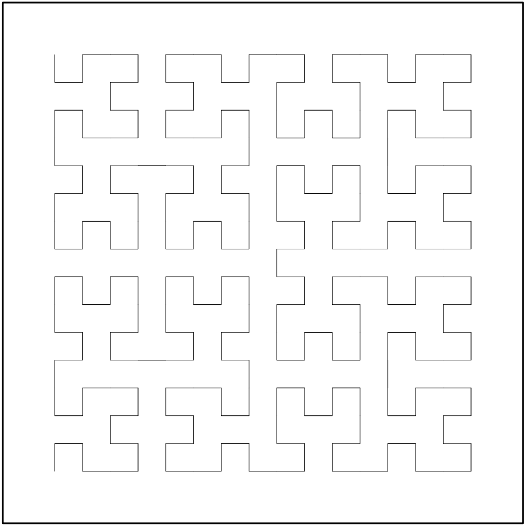
"Jeg vender mig i rædsel og afsky fra disse patologiske funktioner."

Charles Hermite (1822–1901)

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

Mysteriet gjort til dyd: David Hilbert (1862–1943)

Hilberts flade-udfyldende kurve



Del V

Opsummering og perspektiver

Så hvordan *blev* matematikken moderne?

- Organisationen af matematik:
  - Institutionalisering (professorer, institutter).
  - Internationalisering (tidsskrifter, kongresser, ICM).
  - Professionalisering (undervisning, forskning).
- Matematikkens indhold:
  - Eksplosion i de emner og områder, som matematik kan behandle.
  - Stringens og *begrebscentreret* matematik.
  - Abstraktion og generalitet; tabet af intuition.
  - Aksiomatisering.
- Matematikkens natur:
  - Autonomi fra fysik og arbejdsdeling.
  - Tabet af intuition; tabet af sikkerhed — eller i hvert fald en bestemt slags intuition og sikkerhed.
  - Nye bekymringer over grundlaget (og siden *Grundlagskrise* i 1920'erne).

Matematikken er ikke (længere) hvad den ligner

René Magritte (1898–1967)

Forslag til yderligere læsning

Gray, J. (2008). *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*. Princeton og Oxford: Princeton University Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sørensen, H. K. (2009). "“Denne sætning kan ikke bevises”: Da matematikken blev moderne". I: *Modernitetens Verden: Tiden, videnskab, historien og kunst.* Udg. af O. Høiris og T. Ledet. Århus: Aarhus Universitetsforlag, s. 251–263.

— (okt. 2010a). "Relations between mathematics and theology: Theological aspects of the notion of infinity in the history of mathematics". I: *God — a Mathematician?* Udg. af H. Kragh og M. V. Nielsen. Bd. 5. Aarhus: University of Aarhus, s. 27–70. url: `http://teo.au.dk/teonat/praesentation`.

Volkert, K. T. (1986). *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Henvisninger

Schanz, H.-J. (2009). "Hvad er modernitet?" I: *Modernitetens Verden: Tiden, videnskab, historien og kunst.* Udg. af O. Høiris og T. Ledet. Århus: Aarhus Universitetsforlag, s. 33–40.

Sørensen, H. K. (2005). "Exceptions and counterexamples. Understanding Abel's comment on *Cauchy's Theorem*". *Historia Mathematica*, bd. 32, nr. 4, s. 453–480.

— (2008). "Romantikkens ligninger — matematikkens genier". I: *Romantikkens Verden: Natur, menneske, samfund, kunst og kultur.* Udg. af O. Høiris og T. Ledet. Århus: Aarhus Universitetsforlag, s. 551–566.

— (2010b). "Tusind Engle på et Knappenålshoved: Matematikken i Middelalderen". I: *Middelalderens Verden: Verdensbilledet, tænkningen, rummet og religionen.* Udg. af O. Høiris og P. Ingesman. Århus: Aarhus Universitetsforlag, s. 91–104.

Weierstrass, K. (1872). "Über continuerliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotient besitzen". I: *Mathematische Werke von Karl Weierstrass.* Bd. 2. 7 bd. Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli 1872. Berlin: Mayer und Müller, s. 71–74.

Wiener, C. (1881). "Geometrische und analytische Untersuchung der *Weierstrass*schen Function". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, bd. 90, s. 221–252.

Hvis jeg nu er interesseret i at vide mere?

- Matematikhistoriske kurser, fx „Aspekter af matematikkens historie“ (Q2) og „Matematikken i Antikken“ (Q3).
- „Matematikkens videnskabsteori“ (Q3).
- Bachelorprojekter og specialer i matematikkens historie og filosofi.

Det håber jeg da, at I er! Og det så også sådan ud undervejs!